Bac Technologique - Sciences et Technologies Industrielles
Génie Electronique - Génie Electrotechnique - Génie Optique
Antilles Guyane - Session 2007

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient 4

Les deux exercices et le problème sont obligatoires.
L'usage des calculatrices est autorisé durant l'ensemble de l'épreuve.
Le formulaire officiel de mathématiques, prévu par l'arrêté du 27 mars 1991, est joint au sujet.
Calculatrice autorisée, conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

4 points

exercice 1

On rappelle que i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation d'inconnue z : $z^2 - 6z + 10 = 0$.

2. Soit P le polynôme défini pour tout nombre complexe z par : $P(z) = z^3 - 12z^2 + 46z - 60$.
   a) Calculer P(6).
   b) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout complexe z, on ait : $P(z) = (z - 6)(az^2 + bz + c)$.
   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

3. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm ; soient A, B et C les points de ce plan d'affixes respectives 3 + i, 3 - i et 6.
Placer les points A, B et C.

4. Démontrer que le quadrilatère OACB est un parallélogramme.

5. Comparer les longueurs OA et OB. En déduire la nature du parallélogramme OACB.

6 points

exercice 2

Une personne a 5 jetons indiscernables au toucher dans sa poche : un jeton d'une valeur de 2 €, deux jetons d'une valeur de 1 € chacun et deux jetons d'une valeur de 0,50 € chacun.

Partie I

Cette personne choisit au hasard, *successivement et sans remise*, deux jetons dans sa poche. On s'intéresse à la somme *S* des valeurs des deux jetons choisis.

1. Construire un arbre ou un tableau décrivant cette expérience.
En déduire les valeurs possibles de la somme *S*.

2. Soit A l'évènement : " la somme *S* est égale à 1,5 ", et B l'évènement : " la somme *S* est égale à 1 ".
   a) Vérifier que la probabilité de l'évènement A est égale à 0,4.
   b) Déterminer la probabilité de l'événement B.

3. Déterminer la probabilité pour que la somme *S* soit supérieure ou égale à 2.

Partie II

Cette personne introduit les deux jetons choisis dans un appareil de stationnement. Le coût est de 0,50 € pour une heure de stationnement.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque choix de deux jetons associe la durée maximale de stationnement autorisé, exprimée en heures.

1. Déterminer, en utilisant la partie 1, la probabilité pour que X prenne la valeur 3.

2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

3. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

10 points

probleme

Les parties II et III peuvent être traitées indépendamment de la partie I.

Partie I

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : y' = 2y où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

2. Soit l'équation différentielle (E) : y' - 2y = e^{x} où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.
   a) Soit a un nombre réel et u la fonction définie pour tout réel x par $u(x) = a\mathrm{e}^{x}$.
Déterminer a pour que la fonction u soit une solution de l'équation différentielle (E).
   b) Soit b un nombre réel. On admet que la fonction w définie pour tout réel x par $w(x) = b\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}$ est une solution de l'équation différentielle (E). Déterminer b pour que la fonction w vérifie w(0) = 0.

Partie II

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}$. On appelle f' la fonction dérivée de f et C_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$ d'unité graphique 4 cm.
On remarquera que, pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x} - 1)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?

2. a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x et étudier son signe.
   b) Calculer $f(-\ln 2)$. On détaillera les calculs.
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

4. Tracer la droite et la courbe C_f.

Partie III

1. Etudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x.

2. Calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x$.

3. On considère la partie D du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$.
   a) Hachurer la partie D sur le graphique.
   b) Déterminer l'aire de D. On exprimera le résultat en centimètres carrés.

Correction

exercice 1

1. **Résolution de l'équation z² - 6z + 10 = 0 :**
$\Delta = (-6)^2 - 4\times 1\times 10 = -4 = (2i)^2$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :
$z_1 = \dfrac{6-2i}{2} = \boxed{3-i}$ ou $z_2 = \dfrac{6+2i}{2} = \boxed{3+i}$

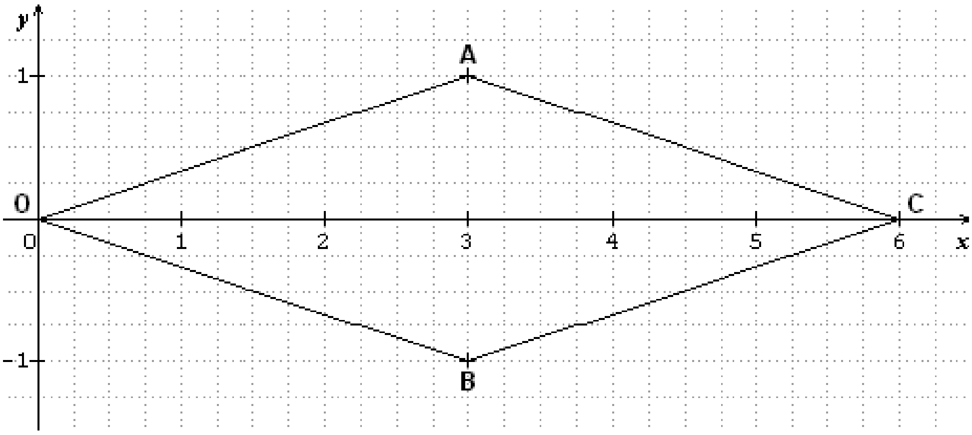
2. a) $P(6) = 6^3 - 12\times 6^2 + 46\times 6 - 60 = 0$
donc 6 est une racine de P(z), donc P(z) se factorise par z - 6.

2. b) En developpant puis en ordonnant selon les puissances de z :
$(z - 6)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b - 6a)z^2 + (c - 6b)z - 6c$
Par identification avec les coefficients de P(z), on a :
$\{\mathrm{a} = 1$
$\mathrm{b} - 6\mathrm{a} = -12$
$\mathrm{c} - 6\mathrm{b} = 46$
$-6\mathrm{c} = -60$

Donc : $\boxed{P(z) = (z-6)(z^2-6z+10)}$

2. c) P(z) = 0
$\Longleftrightarrow$ (z - 6)(z² - 6z + 10) = 0
$\Longleftrightarrow$ z - 6 = 0 ou z² - 6z + 10 = 0
$\Longleftrightarrow$ $\boxed{z=6}$ ou $\boxed{z=3-i}$ ou $\boxed{z=3+i}$

3.



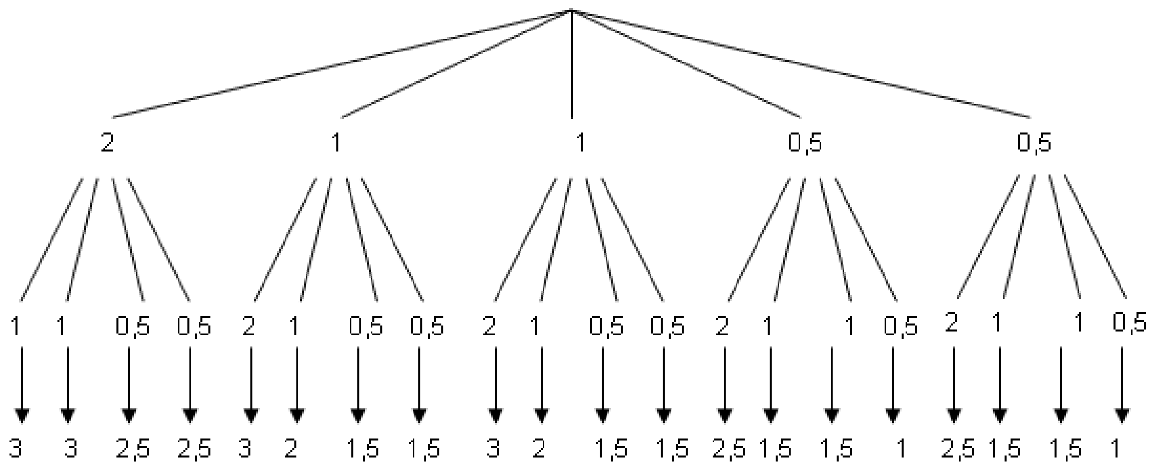
4. **Calcul des affixes des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BC}$:**
$Z_{\overrightarrow{OA}} = z_A - z_O = 3+i$ et $Z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = 6-(3-i) = 3+i$
$Z_{\overrightarrow{OA}} = Z_{\overrightarrow{BC}}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont égaux donc **<u>OACB est un parallèlogramme</u>**.

5. **Calcul des longueurs OA et OB :**
$\text{OA} = |z_A| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$
$\text{OB} = |z_B| = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$
OA = OB donc le parallèlogramme OACB a deux côtés consécutifs égaux, donc **<u>OACB est un losange</u>**.

exercice 2

Partie 1

1. **Arbre décrivant l'expérience aléatoire et donnant les valeurs possibles pour la somme S :**



On dénombre **20 tirages possibles**.
Valeurs possibles pour S : **{1 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3}**

2. a) Sur les 20 tirages possibles, il y en a 8 pour lesquels la somme est égale à 1,5 Euros, donc :

$$\boxed{\mathrm{P(A)} = \frac{8}{20} = 0,4}$$

2. b) Sur les 20 tirages possibles, il y en a 2 pour lesquels la somme est égale à 1 Euro, donc :

$$\boxed{\mathrm{P(B)} = \frac{2}{20} = 0,1}$$

3. $\mathrm{P(S \geqslant 2)} = 1 - P(\mathrm{S} < 2)$
$\mathrm{P(S \geqslant 2)} = 1 - (\mathrm{P(S = 1)} + \mathrm{P(S = 1,5)}))$
$\mathrm{P(S \geqslant 2)} = 1 - (\mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)})$
$\mathrm{P(S \geqslant 2)} = 1 - (0,1 + 0,4)$
$\boxed{\mathrm{P(S \geqslant 2)} = 0,5}$

Partie II

1. La durée de stationnement est de 3 heures lorsque la somme introduite est de 1,5 Euros :

$$\boxed{\mathrm{P(X = 3) = P(S = 1,5)} = 0,4}$$

2. Le temps de stationnement est égal au double de la somme introduite.

x_i	2	3	4	5	6
p_i	0,1	0,4	0,1	0,2	0,2

3. Calcul de l'espérance mathématique de X :
E(X) = 0,1 × 2 + 0,4 × 3 + 0,1 × 4 + 0,2 × 5 + 0,2 × 6

$$\boxed{\mathrm{E(X)} = 4}$$

probleme

Partie I

1. Les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont données par : $\boxed{f(x) = ke^{2x}}$ où k est un réel quelconque.
<u>Rappel</u> : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ax$ est donné par : $f(x) = ke^{ax}$.

2. a) $u(x) = ae^{x}$ donc $u'(x) = ae^{x}$.
La fonction u est solution de (E) $\Longleftrightarrow u'(x) - 2u(x) = e^{x}$
$\Longleftrightarrow ae^{x} - 2ae^{x} = e^{x}$
$\Longleftrightarrow -ae^{x} = e^{x}$
$\Longleftrightarrow \boxed{a = -1}$

2. b) **Détermination du réel b :**
$w(0) = 0$
$\Longleftrightarrow be^{2x} - e^{x} = 0$
$\Longleftrightarrow be^{0} - e^{0} = 0$
$\Longleftrightarrow b - 1 = 0$
$\Longleftrightarrow \boxed{b = 1}$

Partie II

1. **Limite en +∞ :**
En développant, on a bien : $e^{x}(e^{x} - 1) = e^{2x} - e^{x}$.

Limite en -∞ : on utilise $f(x) = e^{2x} - e^{x}$

Donc la courbe f admet une **<u>asymptote horizontale</u>** d'équation $y = 0$ en -∞.

2. a) $\boxed{f'(x) = 2e^{2x} - e^{x} = e^{x}(2e^{x} - 1)}$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $e^{x} > 0$.
Signe de $2e^{x} - 1$:
$2e^{x} - 1 > 0 \Longleftrightarrow e^{x} > \frac{1}{2}$
$\Longleftrightarrow x > \ln(\frac{1}{2})$
$\Longleftrightarrow x > -\ln 2$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
e^x		+		+	
$2e^x-1$		−	0	+	
f'		−	0	+	

2\. b) **Calcul de $f(-\ln 2)$:**

$f(-\ln 2) = e^{-2\ln 2} - e^{-ln2} = -0,25$

2\. c)

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
f'		−	0	+	
f	0	↘	$-0,25$	↗	$+\infty$

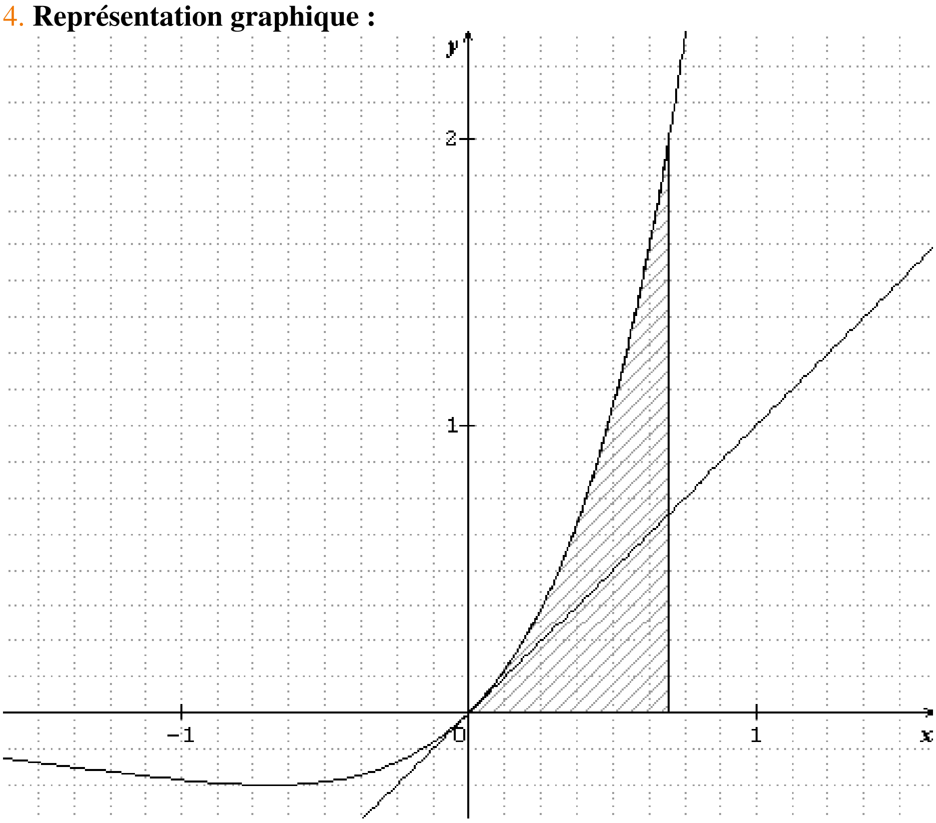
3\. **Equation de la droite tangente au point d'abscisse 0 :**

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Pour $a = 0$, on a :

$f(0) = e^0 - e^0 = 0$ et $f'(0) = 2e^0 - e^0 = 1$

Donc l'équation de la droite est : $\boxed{y = x}$

4\. **Représentation graphique :**



Partie III

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $e^x > 0$.
Signe de $e^x - 1$:
$e^x - 1 > 0 \Longleftrightarrow e^x > 1$
$\Longleftrightarrow x > \ln 1$
$\Longleftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x		$+$		$+$	
$e^x - 1$		$-$	0	$+$	
f		$-$	0	$+$	

2. Soit F une primitive de f : $\mathrm{F}(x) = \dfrac{e^{2x}}{2} - e^x$

$\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x$
$\mathrm{I} = [\mathrm{F}(x)]_0^{\ln 2}$
$\mathrm{I} = \mathrm{F}(\ln 2) - \mathrm{F}(0)$
$\mathrm{I} = \left(\dfrac{e^{2\ln 2}}{2} - e^{\ln 2}\right) - \left(\dfrac{e^0}{2} - e^0\right)$
$\mathrm{I} = \dfrac{4}{2} - 2 - \dfrac{1}{2} + 1$
$\boxed{\mathrm{I} = \dfrac{1}{2}}$

3. a) Voir figure.

3. b) La fonction f est positive sur l'intervalle [0 ; ln 2] donc $Aire(D) = \text{U.A.} \times I$, avec :
Unité d'aire : $1\ \text{U.A.} = 4 \times 4 = 16$
Donc : $\boxed{Aire(D) = 8\,\text{cm}^2}$